Приложение 5.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института математики,

физики и информационных технологий

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Королева Н.Л.

«28» марта 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине

**«Теория отображений полуупорядоченных пространств»**

Научная специальность:

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Уровень высшего образования

подготовка кадров высшей квалификации

по программам подготовки научных и

научно-педагогических кадров в аспирантуре

Форма обучения

очная

Год набора

2023

Тамбов 2023

**Автор программы:** Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор

Рабочая программа составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов) (приказ Минобрнауки России от 20 октября 2021 г. № 951).

Рабочая программа принята на заседании кафедры функционального анализа «20» марта 2023 года Протокол № 7.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |
| --- |
| 1. Цели и задачи дисциплины |
| 2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры |
| 3. Объем и содержание дисциплины |
| 4. Контроль знаний обучающихся |
| 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины |
| 6. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы |
|  |

**1. Цели и задачи дисциплины**

**1.1 Цель дисциплины** – изучение теории полуупорядоченных пространств, формирование умений и навыков решения задач функционального анализа в полуупорядоченных пространствах, задач нахождения оценок решений дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений, формирование умений и навыков применения математических методов в решении прикладных задач.

**1.2 Задачи дисциплины:**

* изучение теории полуупорядоченных пространств;
* изучение свойств однозначных и многозначных отображений, действующих в полуупорядоченных пространствах;
* исследование задач, которые сводятся к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах;

**1.3 Требования к результатам освоения дисциплины**

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

**Знать:**

- основные понятия и утверждения теории полуупорядоченных пространств;

- свойства отображений, действующих в полуупорядоченных пространствах;

- приложения теории полуупорядоченных пространств к исследованию дифференциальных, функционально-дифференциальных и интегральных уравнений и включений.

**Уметь:**

- выбирать и строить пространства для решения и исследования различных операторных уравнений и включений, задач оптимального управления;

- использовать свойства отображений полуупорядоченных пространств для исследования разрешимости и получения эффективных оценок решений операторных уравнений.

**Владеть:**

- навыками задания отношений порядка в различных функциональных пространствах;

- навыками сведения задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах;

- навыками построения эффективных оценок решений уравнений и включений различного типа.

**2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры:**

Дисциплина «Теория отображений полуупорядоченных пространств» относится к образовательному компоненту «Дисциплины (модули)» программы аспирантуры по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика. Дисциплина является элективной.

Дисциплина «Теория отображений полуупорядоченных пространств» изучается во 2 семестре.

**3. Объём и содержание дисциплины**

**3.1 Объем дисциплины**

Очная форма обучения: 2 з.е.

| Вид учебной работы | Очная форма обучения  (всего часов) |
| --- | --- |
| **Общая трудоёмкость дисциплины** | **72** |
| *Контактная работа (по учебным занятиям)* | *22* |
| Лекции (Л) | 10 |
| Практические (семинарские) занятия (ПЗ) | 12 |
| Лабораторные занятия (ЛЗ) | - |
| *Самостоятельная работа (СР)* | *50* |
| *Зачет* |  |

**3.2 Содержание дисциплины:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № темы | Название  раздела/темы | Вид учебной работы, час.  (очная форма) | | | | Формы текущего  контроля |
| Л | ПЗ | ЛЗ | СР |
|  | Тема 1. Полуупорядоченные пространства | 2 | 4 |  | 15 | Индивидуальные домашние задания |
|  | Тема 2. Пространства с конусом | 2 | 4 |  | 15 | Индивидуальные домашние задания |
|  | Тема 3. Операторы в полуупорядоченных пространствах | 6 | 4 |  | 20 | Индивидуальные домашние задания, контрольная работа |

**Тема 1. Полуупорядоченные пространства**

**Лекция.** Аксиомы полуупорядоченного пространства. Полуупорядоченные пространства общего вида. Верхний и нижний предел. Дополнение полуупорядоченного пространства. Декартово произведение.

**Практическое занятие.**

1. Примеры бинарных отношений. Определение свойств отношений. Отношение порядка.
2. Аксиомы полуупорядоченного пространства. Примеры линейно упорядоченных множества (цепи). Примеры полуупорядоченных пространств.
3. Верхний и нижний предел. Нахождение минимального, наименьшего элемента в конкретных пространствах.
4. Примеры полных и секвенциально полных упорядоченных пространств. Пополнение полуупорядоченного пространства.
5. Сформулировать лемму Цорна, теорему Цермелло, теорему Хаусдорфа.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Конспектирование материалов, работа со справочной литературой.
3. Выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

**Тема 2. Пространства с конусом**

**Лекция.** Конусы и полуупорядоченность. Разновидности конусов. Линейные положительные функционалы. Пространства с двумя конусами. Специальные конусы. Интегральные операторы. Краевые задачи. Двухточечная задача. Линейные положительные операторы. Неразложимые операторы. Оценки спектрального радиуса. Позитивные собственные значения. Несовместные неравенства. Положительная обратимость. Дифференцируемость по конусу. Производные Фреше-Гато. Производные по конусу. Производные высших порядков. Дифференцирование интегральных операторов. Дифференцирование оператора сдвига.

**Практическое занятие.**

1. Привести примеры конусов в линейных пространствах непрерывных, суммируемых, абсолютно непрерывных функций. Выяснить свойства этих конусов. Определить соответствующую полуупорядоченность в линейных пространствах.
2. Линейные положительные функционалы. Примеры линейных положительных функционалов, определенных на конечномерном пространстве, пространствах непрерывных, суммируемых, абсолютно непрерывных функций.
3. Примеры пространств с двумя конусами.
4. Интегральные операторы. Регулярные интегральные операторы в пространствах непрерывных, суммируемых функций.
5. Линейные положительные операторы. Определение и свойства.
6. Краевые задачи. Двухточечная задача. Периодическая задача. Условия положительности оператора Грина.
7. Неразложимые операторы. Оценки спектрального радиуса. Позитивные собственные значения. Примеры.
8. Положительная обратимость. Дифференцируемость по конусу. Производные Фреше-Гато. Производные по конусу. Примеры.
9. Производные высших порядков. Дифференцирование конкретных интегральных операторов.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Конспектирование материалов, работа со справочной литературой.
3. Выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

**Тема 3. Операторы в полуупорядоченных пространствах**

**Лекция.** Основные понятия теории упорядоченных пространств. Монотонные отображения. Теорема Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора. Теорема Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве. Теорема Канторовича-Тарского с сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек. Полуупорядоченные конусом банаховы пространства. Геометрические свойства конусов в банаховых пространствах. Теоремы о неподвижных точках монотонных и предельно монотонных операторов в банаховых пространствах. Приложения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций. Теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

**Практическое занятие.**

1. Определение и примеры монотонных отображений.
2. Сформулировать теорему Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора. Привести примеры применения этой теоремы к исследованию уравнений.
3. Сформулировать теорему Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве. Привести примеры применения этой теоремы к исследованию уравнений.
4. Сформулировать теорему Канторовича-Тарского с сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора. Привести примеры применения этой теоремы к исследованию уравнений, к приближенному решению уравнений.
5. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек. Применения к проблеме существований верхних и нижних решений задачи Коши для дифференциальных уравнений.
6. Сформулировать определение свойства предельной монотонной компактности операторов. Сформулировать теорему о неподвижных точках монотонных и предельно монотонно компактных операторов в банаховых пространствах.
7. Примеры применения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций.
8. Сформулировать теорему Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Какие дополнительные условия надо потребовать, чтобы утверждение теоремы Чаплыгина было справедливо для системы дифференциальных уравнений.

**Задания для самостоятельной работы**

1. Проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы.
2. Конспектирование материалов, работа со справочной литературой.
3. Выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

**4. Контроль знаний обучающихся**

**4.1 Формы текущего контроля работы аспирантов:** контрольная работа, индивидуальное домашнее задание.

**4.2 Задания текущего контроля**

Задания для контрольной работы

1. Какие из перечисленных множеств являются конусами в соответствующих пространствах? Каковы геометрические свойства этих конусов?

а) ;

b)

c) ;

d) ;

e);

f) .

1. Приведите примеры монотонных отображений, действующих:

а) где упорядочено конусом ;

b) , где упорядочено конусом неотрицательных функций;

c) , где упорядочено конусом неотрицательных неубывающих функций.

1. Оцените решение задачи Коши
2. Докажите существование и оцените решение краевой задачи

Темы для индивидуальных домашних заданий

1. Основные понятия теории упорядоченных пространств. Проиллюстрировать на множестве натуральных чисел с отношением делимости.
2. Монотонные отображения. Теорема Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора.
3. Теорема Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве.
4. Теорема Канторовича-Тарского о сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора.
5. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек.
6. Полуупорядоченные конусом банаховы пространства.
7. Геометрические свойства конусов в банаховых пространствах.
8. Исследовать свойства конусов неотрицательных функций в пространствах , , ,
9. Теоремы о неподвижных точках монотонных и предельно монотонных операторов в банаховых пространствах.
10. Приложения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций. Доказать теорему об интегральном неравенстве для оператора , действующем в пространстве .
11. Теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве и их приложения.

**4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине** проводится в форме зачета.

Вопросы зачета

1. Основные понятия теории упорядоченных пространств.
2. Монотонные отображения.
3. Теорема Кнастера-Тарского существования неподвижной точки монотонного оператора.
4. Теорема Бирхгофа-Тарского о двустороннем неравенстве.
5. Теорема Канторовича-Тарского с сходимости итераций к неподвижной точке монотонного оператора.
6. Наибольшие и максимальные элементы в множестве неподвижных точек.
7. Полуупорядоченные конусом банаховы пространства.
8. Геометрические свойства конусов в банаховых пространствах.
9. Теоремы о неподвижных точках монотонных и предельно монотонных операторов в банаховых пространствах.
10. Приложения принципов неподвижных точек к исследованию интегральных уравнений в пространствах непрерывных и суммируемых функций.
11. Теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

Задания для зачета

1. Приведите примеры конусов в линейных пространствах непрерывных, суммируемых, абсолютно непрерывных функций.
2. Приведите примеры пространств с двумя конусами. Ответ поясните.
3. Приведите пример монотонного отображения, действующего где упорядочено конусом .
4. Какие из данных множеств являются конусами в соответствующих пространствах? Каковы геометрические свойства этих конусов?

а) ;

b)

1. Приведите примеры использования принципов неподвижной точки к исследованию интегральных уравнений.

**4.4 Шкала оценивания промежуточной аттестации**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Основные показатели достижения результата** |
| «зачтено» | Сформированы, но, возможно содержащие отдельные пробелы, знания о полуупорядоченных пространствах, их свойствах, приложениях к исследованию операторных уравнений и включений различного типа. |
| В целом успешное, но, возможно, не систематически осуществляемое умение выбирать и строить подходящие пространства для решения и исследования различных операторных уравнений и включений, задач оптимального управления, использовать свойства отображений полуупорядоченных пространств для исследования разрешимости и получения эффективных оценок решений операторных уравнений. |
| В целом успешное, но, возможно, не систематическое владение навыками задания отношений порядка в различных функциональных пространствах, навыками сведения задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах, навыками построения эффективных оценок решений уравнений и включений различного типа. |
| «не зачтено» | Отсутствие знаний или фрагментарные знания теории полуупорядоченных пространств, их основных свойств, возможностей использования для исследования операторных уравнений и включений. |
| Отсутствие умений или недостаточное умение выбирать и строить подходящие пространства для решения и исследования различных операторных уравнений и включений, задач оптимального управления, использовать свойства отображений полуупорядоченных пространств для исследования разрешимости и получения эффективных оценок решений операторных уравнений. |
| Отсутствие навыков или фрагментарное владение навыками задания отношений порядка в различных функциональных пространствах, навыками сведения задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и включений к операторным уравнениям и включениям в полуупорядоченных пространствах, навыками построения эффективных оценок решений уравнений и включений различного типа. |

**5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

* 1. **Основная литература:**

1. Арутюнов, А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу [Текст] : учеб. пособие / А.В. Арутюнов .— М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014 .— 184 с. — ISBN 978-5-9221-1558-2.
2. Жуковский, Е.С. Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] : Монография / Е.С. Жуковский ; Тамб. гос. ун-т им.Г.Р.Державина .— Тамбов : Изд-во ТГУ, 2003 .— 148 с. — ISBN 5-89016-078-8 : 40.88.
3. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. УРСС, М.: 2010.

**5.2** **Дополнительная литература:**

1. Арутюнов, А. В. О структуре множества точек совпадения [Текст] / А. В. Арутюнов, Б. Д. Гельман // Математический сборник .— 2015 .— Т. 206, № 3 .— С. 35-56 .— ISSN 0368-8666 .— Библиогр.: с. 56 (12 назв.).
2. Арутюнов, А. В. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах [Текст] / А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский // Доклады Академии наук .— 2013 .— Т. 453, № 6, декабрь .— С. 595-598.— (Математика) .— ISSN 0869-5652 .— Библиогр. : с. 598 (8 назв.)
3. Крейн С.Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 2012.
4. Кусраев А.Г., Тихомиров В.М. Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006.
5. Кротов Н.В. Приближенные методы решения нелинейных уравнений. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2010.

**5.3** **Иные источники:**

1. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Наука, 2002.
2. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа. УРСС, М.: 2006.
3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. УРСС, М.: 2012.

**6. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: помещения для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

**Электронная информационно-образовательная среда**

<http://moodle.tsutmb.ru>

Взаимодействие преподавателя и аспиранта в процессе освоения дисциплины осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.

**Лицензионное программное обеспечение:**

Операционная система Microsoft Windows Vista Business Russian

Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный Russian Edition. 1500-2499 Node 1 year Educational Renewal Licence

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

**Информационные справочные системы и профессиональные базы данных:**

|  |  |
| --- | --- |
| ЭБС «Университетская библиотека онлайн» | [http://www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru/) |
| ЭБС «Консультант студента»: Медицина. Здравоохранение, Комплект Гуманитарные науки | [http://www.studentlibrary.ru](http://www.studentlibrary.ru/) |
| ЭБС «IPRSMART» (старое название  « IPR books») | [http://iprbookshop.ru](http://iprbookshop.ru/) |
| ЭБС «Юрайт» | [http://www.urait.ru](http://www.urait.ru/) |
| Сетевая электронная библиотека педагогических вузов | <https://e.lanbook.com/> |
| Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU | [http://elibrary.ru](http://elibrary.ru/) |
| Государственная информационная система «Национальная электронная библиотека» | [https://нэб.рф](https://xn--90ax2c.xn--p1ai/) |
| Президентская библиотека имени Б.Н. Ельцина | [http://www.prlib.ru](http://www.prlib.ru/) |
| Электронный справочник «Информио» | [www.informio.ru](http://www.informio.ru/) |
| Архив научных журналов зарубежных издательств | [https://arch.neicon.ru](https://arch.neicon.ru/) |
| БД AIPP E-Book Collection I + Collection II – полнотекстовые коллекции книг издательства AIP Publishing в области прикладной и химической физики, биологии, энергетики, оптики, фотоники, материаловедения и нанотехнологий и др. | <https://www.scitation.org/ebooks> |
| Коллекции журналов:   * Life Sciences Package и БД Springer Nature, * Social Sciences Package и БД Springer Nature, * Physical Sciences & Engineering Package   – полнотекстовые политематические базы академических журналов | [www.nature.com](http://www.nature.com) |
| БД 2021 - 2023 eBook Collections  издательства Springer Nature  – полнотекстовая политематическая база академических книг | <https://link.springer.com/> |
| Математические журналы –  МИАН. Полнотекстовая коллекция математических журналов | [http://www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru/) |